Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
лицей «Морской технический»
муниципального образования город Новороссийск

КОМБИНАТОРИКА

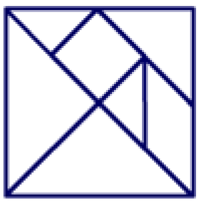
Учебно – методическое пособие

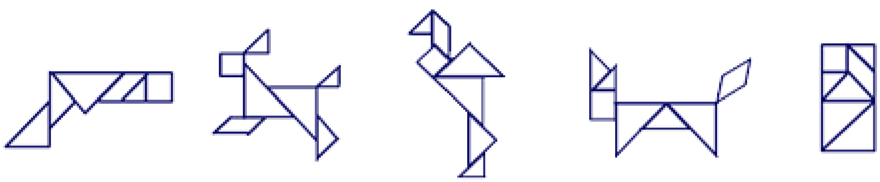
Составитель: Бердовская Светлана Викторовна

г. Новороссийск

2017 год

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из данных объектов.
Этот раздел математики тесно связан с рядом других разделов: теорией вероятностей, теорией графов, теорией чисел, теорией групп и т. д. и умение решать комбинаторные задачи может пригодится в разных ситуациях, поэтому изучению темы «Комбинаторика» я предлагаю посвящать занятия кружка, начиная с пятого класса .

<u>Историческая справка:</u> так как комбинаторика - это наука про общие законы комбинирования и образования различных конфигураций объектов, то с задачами в которых приходится выбирать те или иные предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди разных расположений наилучшие, люди столкнулись еще в доисторическую эпоху, выбирая наилучшее расположение охотников на охоте, наилучшее расположение воинов во время битвы.
Комбинаторные навыки оказались полезными и в часы досуга. Ведь для игр в нарды, шашки, шахматы, которые появились позднее, приходилось рассматривать различные сочетания передвигаемых фигур и выигрывал тот, кто их лучше изучил, знал выигрышные комбинации и умел избегать проигрывающих комбинаций. С комбинаторикой люди сталкивались во всем мире.
Из Китая к нам пришла интересная комбинаторная головоломка танграм. Квадрат разрезают на 7 частей. В результате пулучается 2 больших, 1 средний и 2 маленьких треугольника, квадрат и параллелограмм. Из полученных фигур складывают различные силуэты, 


,

что тоже требует комбинаторных навыков наряду с геометрическим воображением.

Комбинаторика развивалась и в Древней Греции. Хотя говорить об уровне комбинаторных знаний древних греков затруднительно, поскольку Александрийская библиотека, в которой были собраны большинство научных книг, погибла при взятии Александрии. И мы можем только догадываться о содержании тех книг по кратким пересказам и намекам в сохранившихся рукописях. По этим намекам все же можно судить о том, что определенные представления о комбинаторике у греческих ученых все же были. Аристотель описал без пропусков все виды трехчленных силлологизмов, а его ученик Аристоксен из Тарента перечислил все возможные комбинации длинных и коротких слогов в стихотворных размерах. Живший в 4 в. н.э. математик Папп рассматривал число пар и троек, которые можно получить из трех элементов, допуская их повторения.

По мнению Гиппарха, из 10 утверждающих аксиом можно составить 103049 сочетаний, а добавив к ним отрицающие, 310 952. Приводимые Гиппархом числа слишком точны, чтобы считать их результатом грубой оценки. По видимому, у древних греков все таки были какие то правила комбинаторных расчетов.

Комбинаторикой также занимались астрологи. Их интересовал вопрос о движении планет и их влиянии на судьбы людей. Особое значение они придавали сочетаниям планет – встречам различных планет в одном знаке Зодиака. Астролог бен Эзра в 1140 г. рассчитал количество сочетаний семи планет по две, по три и т.п. Он знал, что число сочетаний планет по две равно числу их сочетаний по пять, а число их сочетаний по три равно числу их сочетаний по четыре. Окончательную формулу для подсчета числа сочетаний вывел математик Гершон, живший в начале 14 в. Однако его работа, написанная на малодоступном большинству ученых древнееврейском языке, осталась почти незамеченной. Вновь эту формулу вывел в начале 17в. Французский математик Эригон.

В начале 12 века Западная Европа начала пробуждаться от многовековой духовной спячки. Развитие торговли с востоком привело к проникновению в Европу арабской науки. Наиболее смелые и любознательные европейцы пробирались в находившуюся под владычеством арабов Испанию и знакомились там не только с творениями греческих ученых, но и достижениями арабской и индийской научной мысли.

Значительный толчок к развитию комбинаторики дали азартные игры, существовавшие еще в глубокой древности, но получившие свое распространение после крестовых походов. Наибольшее распространение получила игра в кости – два или три кубика с нанесенными на них очками выбрасывали на стол, и ставку брал выбросивший большую сумму очков игрок. В кости играли повсюду, выигрывая и проигрывая в них золото, замки, драгоценные камни и лошадей. Атос – один из героев «Трех мушкетеров» - умудрился проиграть в кости даже своего слугу Гримо. Несмотря на запреты церкви, игроки неустанно упражнялись в выбрасывании костей. И они заметили, что некоторые суммы выпадали редко, а

другие чаще. Пытаясь понять. В чем дело, составляли таблицы, показывающие сколькими способами можно получить то или иное число очков. На первых порах иногда допускалась ошибка – подсчитывали лишь число различных сочетаний костей, дававших данную сумму. Например, при бросании двух костей сумма 6 получается из сочетаний (1,5),(2,4),(3,3), а сумма 7 – из сочетаний (1,6),(2,5),(3,4). Так как в обоих случаях получается три различных сочетания с данной суммой, то можно сделать ошибочный вывод, что суммы очков 6,7 и 8 (также получаемая из сочетаний трех костей) должны выпадать одинаково часто. Но это противоречит опыту – 7 очков выпадает чаще. Дело в том, что при бросании двух костей сочетание (3,3) может быть получено единственным способом, а сочетание (3,4)- двумя способами. Этим объясняется большая частота выпадения суммы 7.
Таким образом, оказалось, что надо учитывать не только сочетания очков, но и их порядок. Более сложными оказались исследования для трех костей. Здесь при учете порядка костей оказывается 216 различных комбинаций, а без учета порядка 56. Этими вопросами занимались такие известные итальянские математики 16 в. Как Кардано, Тарталья и др. Наиболее полно исследовал этот вопрос Галилео Галилей в 17 в.
Вопросами комбинаторики занимались Паскаль, Ферма, Лейбниц, Гиденбург.
Не только азартные игры давали пищу для комбинаторных измышлений математиков. Еще с давних пор дипломаты. Стремясь к тайне переписки, изобретали все более и более сложные шифры, а секретные службы других государств пытались эти шифры разгадать. Одним из простейших шифров была «тарабарская грамота», в которой буквы заменялись другими по определенным правилам. Однако такие шифры легко разгадывались по характерным сочетаниям букв. Поэтому стали применять шифры, основанные на комбинаторных принципах, например, на различных перестановках букв, заменах букв с использованием ключевых слов и т.д. Для кодирования и расшифровки привлекались математики, обладающие комбинаторными способностями.
Навыки в разгадке шифров помогли ученым, когда археологи стали откапывать камни и черепки с таинственными знаками – письменностью замолкшей несколько тысячелетий тому назад. Археологи подвергали тексты комбинаторному анализу. И лишь Шампольону – ученому, сочетавшему незаурядный комбинаторный дар с глубочайшим знанием филологии , удалось прочесть иероглифы. Сложность задачи заключалась в том, что Шампольону не были известны ни язык надписей, ни смысл знаков. Однако, выделив знаки, которые в греческом тексте обозначали имена царей, Шампольон обнаружил, что некоторые знаки, которые в греческом тексте обозначали имена царей и некоторые знаки в именах фараонов Птолемея и Клеопатры совпадают. Так были найдены звучания иероглифов, означающих буквы «п» и «л». Затем Шампольон прочел имена римских императоров Тиберия и Траяна, древних фараонов Рамсеса и Тутмоса – ключ к чтению иероглифов, утерянный несколько тысячелетий тому назад, был вновь обретен. Это было торжество комбинаторного метода в чтении забытых письменностей, основанных на наблюдениях над текстом, на сопоставлении повторяемости комбинаций слов и грамматических форм с соображениями, связанными с назначением надписи, временем и условиями ее составления.

Когда биологи стали изучать передачу генетической информации у бактерий, то обнаружили, что в процессе этой передачи хромосомы переходят от одной бактерии к другой не целиком. Они надеялись, изучая перешедшие части, выяснить порядок расположения ген в хромосоме. Здесь их постигла на первых порах неудача – карты хромосом, составленные в разных лабораториях , были непохожи друг на друга. Однако тщательно сравнив полученные карты, французские ученые Жакоб и Вальмон обнаружили их комбинаторное сходство. Выяснилось, что все эти карты были частями одного кольца – хромосомы бактерий оказались свернутыми в кольца, которые перед переходом в другую бактерию разрываются, после чего к одному концу прикрепляется фактор, перетаскивающий часть хромосомы в другую бактерию. А так как разорваться кольцо могло в любом месте, а фактор мог прикрепиться к любому концу, то и возникало все многообразие карт, которое путало картину.
Одной из наиболее сложных загадок в биологии 20 в. Было строение «нитей жизни» - молекул белка и нуклеиновых кислот. Оказалось, что молекулы белка – это объединения нескольких длинных цепей, составленных из 20 аминокислот. Чтобы разгадать структуру хотя бы одной цепи, ее отделяют от остальных и подвергают действию ферментов, разрывающих цепь на строго определенные части. Эти части можно подвергнуть химическому анализу и выяснить в них порядок аминокислот. Затем возникает вопрос о сборке всей цепи из изученных частей. Для этого снова берут молекулы белка и подвергают их действию иных ферментов. Тогда они распадаются на другие части, строение которых также поддается изучению. Путем изучения перекрытий отдельных частей удается выяснить порядок аминокислот во всей цепи. Разумеется, такой комбинаторный анализ требует привлечения мощной вычислительной техники. Сочетая комбинаторные рассмотрения с изучением рентгеновских снимков, ученым удалось разгадать строение многих белков, в частности гемоглобина, инсулина и др.
Торжеством комбинаторного подхода к явлениям жизни можно считать расшифровку строения дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК), сделанную в Кембридже Криком и Уотсоном в 1953 г.
Немного найдется дней в истории науки, сравнимых по своему значению с 17 февраля 1869г. В этот день из хаоса химических элементов, каждый из которых имел свои свойства, возникла стройная таблица – был открыт периодический закон. Это открытие было сделано Д.И. Менделеевым, профессором Петербургского университета. Готовя курс лекций по общей химии, он задумался над порядком в котором следовало рассказывать об элементах. Менделеев попробовал группировать друг с другом не только похожие элементы, но и попробовал расположить в правильном порядке и сами группы. Он стал подбирать, написав на отдельных- карточках элементы с их атомными весами и коренными свойствами, сходные элементы и близкие атомные веса. Раскладывая свой химический пасьянс, великий ученый после напряженных измышлений нашел правильное расположение элементов. Говорят, что окончательная форма таблицы пришла к нему во сне, когда, утомленный непрерывным обдумыванием ее, он прилег отдохнуть. Удивительно, что эта работа, имевшая неисчислимые

последствия для развития химии и физики, была выполнена Менделеевым за один день – 17 февраля 1869г.
Не только для открытия периодической таблицы Менделеева оказалась полезна комбинаторика. В физике комбинаторика оказывается необходимой при изучении свойств кристаллов, описании моделей ферромагнетизма и т.п.
В качестве резюме хотелось бы перечислить некоторые области применения комбинаторики: в производстве это распределение видов работ между рабочими; в агротехнике - размещение посевов на нескольких полях; в учебных заведениях это составление расписаний; в химии - анализ возможных связей между химическими элементами; в лингвистике это рассмотрение вариантов комбинаций букв; для азартных игр это подсчёт частоты выигрышей; в экономике - анализ вариантов купли-продажи акций; в криптографии это разработка методов шифрования; при доставке почты это рассмотрение вариантов пересылки; в спортивных соревнованиях - расчёт количества игр между участниками; в биологии - расшифровка кода ДНК; в военном деле -расположение подразделений; в астрологии -анализ расположения планет и созвездий. Как видите, комбинаторика необходима практически во всех областях нашей жизни. Область применения комбинаторных методов настолько велика, что даже перечисление всех возможных мест использования комбинаторного языка является нереальным
--- ---
Материалы для Исторической справки взяты из книги Н.Я. Виленкина «Популярная комбинаторика» Изд. «Наука» Москва 1975 г.

Класс задач, решаемый комбинаторными методами, настолько огромен, что кажется невозможным научить решать все встречающиеся комбинаторные задачи. В настоящем пособии рассмотрены основные классы задач, которые уже решены, и которые, возможно, позволят развить интуицию, что позволит решать новые задачи в новых приложениях.

1.Начальные сведения.

Решение комбинаторных задач желательно начинать с задач, решаемых рассмотрением всех возможных комбинаций и подсчетом их количества.

При бессистемном выписывании легко упустить какую-то комбинацию или, наоборот, посчитать некоторую комбинацию дважды. Не потерять комбинации при переборе вариантов помогут два правила.

1. Обозначим наши комбинации буквами или цифрами так, что каждая комбинация будет обозначена своей уникальной последовательностью букв или цифр.

2. Выпишем комбинации в алфавитном порядке (при обозначении буквами) или по возрастанию чисел (при обозначении цифрами). При таком переборе ни один вариант не ускользнёт от нас и, с другой стороны, будет исключена возможность повторения вариантов.

Задача 1. Соня собирается съесть яблоко, сливу и мандарин, но пока не решила, в каком порядке ей есть фрукты. Сколькими способами Соня может съесть их?

Решение. Обозначаем буквами: Я — яблоко, С — слива, М — мандарин. Тогда, например, СМЯ — это вариант, когда Маша сначала съест сливу, потом — мандарин, потом — яблоко. Выпишем варианты в алфавитном порядке: МСЯ, МЯС, СМЯ, СЯМ, ЯМС, ЯСМ. Получилось 6 вариантов.

Задача 2. Сколько существует четырёхзначных чисел, сумма цифр которых меньше 4?

Решение. Здесь обозначать нечего — мы и так имеем дело с числами. Остаётся лишь выписать по возрастанию все четырёхзначные числа, сумма цифр которых равна 1, 2 или 3: 1000, 1001, 1002, 1010, 1011, 1020, 1100, 1101, 1110, 1200, 2000, 2001, 2010, 2100, 3000. Всего получилось 15 чисел.

Задача 3. (Леонард Эйлер) Четыре гостя при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Невнимательный швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получил чужую шляпу?

Решение. Занумеруем гостей цифрами 1, 2, 3, 4 и так же занумеруем их шляпы. Считаем, что шляпа с данным номером принадлежит гостю с этим же номером (то есть, например, шляпа 2 принадлежит гостю 2). Тогда каждый вариант получения шляп обозначается четырёхзначным числом, составленным из цифр 1, 2, 3 и 4, в котором номер позиции цифры есть номер гостя, а сама цифра есть номер полученной им шляпы (номера позиций будем считать слева направо). Например, комбинация 4132 означает, что первый гость получил четвёртую шляпу, второй — первую, третий — третью, а четвёртый — вторую. Такой вариант не годится по условию, поскольку третий получил свою шляпу. 1 Теперь понятно, что нужно сделать — выписать по возрастанию все четырёхначные числа, содержащие по одной цифре 1, 2, 3 и 4, такие, что никакая цифра не стоит на позиции со своим номером. Это числа 2143, 2341, 2413, 3142, 3241, 3412, 3421, 4123, 4312. Таким образом имеется 9 вариантов раздачи шляп.

Правило суммы: пусть имеется $\boldsymbol{n}$ попарно непересекающихся множеств $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$, содержащих $\boldsymbol{m_1, m_2, \ldots, m_n}$ элементов соответственно. Число способов, которыми можно выбрать один элемент из всех этих множеств, равно $\boldsymbol{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$.

<u>*Пример 1*</u>. Если на первой полке стоит $\boldsymbol{X}$ книг, а на второй $\boldsymbol{Y}$, то выбрать книгу с первой или второй полки, можно $\boldsymbol{X+Y}$ способами.

Задача 4. От остановки «3-й микрорайон» до остановки «Парк Ленина» мы можем добраться одной из 5 маршруток, одним автобусом или двумя троллейбусами. Сколько есть способов проезда между этими остановками?

Ответ: 5 + 3 + 1 = 9.

Замечание. Требуется следить за тем, чтобы выбор *A* и выбор *B* был взаимоисключающим. Если в рассматриваемом множестве есть элементы, принадлежащие нескольким подмножествам, то правило суммы применять нельзя. Допустим, пусть в классе 17 человек хорошо знают русский язык, 14 математику. Пример 2. Сколько человек в классе хорошо знают русский язык или математику? Ответ: *не более* 31: некоторые могут хорошо знать оба предмета. Здесь нельзя применить правило суммы.

Очень важно уметь находить число объектов, обладающих хотя бы одним из указанных свойств, то есть находить количество элементов в объединении нескольких множеств. В такой ситуации часто приходит на помощь формула включений и исключений. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача 5. Каждый ученик класса побывал в театре или в кино. В театр сходили 22 человека. В кино были 15 человек. И в театре, и в кино были 7 человек. Сколько учеников в классе?

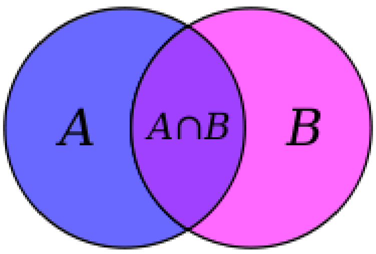
Решение. Если мы найдём сумму 22 + 15, то окажется, что каждого, кто побывал и в театре, и в кино, мы посчитали дважды (например, если Коля сходил и в театр, и в кино, то один раз он вошёл в эту сумму в числе 22 «театралов», а второй раз — в числе 15 «киношников»). Поэтому найденная сумма на 7 больше количества учеников в классе. Следовательно, в классе $22 + 15 - 7 = 30$ человек.

Число элементов конечного множества A называется мощностью этого множества и обозначается $|A|$. Формула включений и исключений даёт возможность находить мощность объединения любого конечного набора множеств.

Формула включений и исключений для двух множеств. Для любых конечных множеств A и B справедливо равенство $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Доказательство формулы почти дословно повторяет решение последней задачи: суммируя мощности множеств A и B, мы дважды учитываем каждый элемент в их пересечении (один раз — со стороны множества A, второй раз — со стороны множества B). Поэтому мощность пересечения надо вычесть.

Можно также доказать эту формулу с помощью следующего наглядного рисунка.

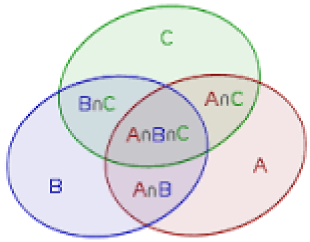


Пусть x — число элементов множества A, не входящих в B; y — число элементов B, не входящих в A; z — число элементов в пересечении A и B. Тогда $x + z = |A|$, $y + z = |B|$, и мы имеем: $|A \cup B| = x + y + z = (x + z) + (y + z) - z = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Формула включений и исключений для трёх множеств. Для любых конечных множеств A, B и C справедливо равенство $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Почему так получается? Назовём двукратными элементы, входящие в пересечение ровно двух множеств, и трёхкратными — элементы, входящие в пересечение трёх множеств. Сложив мощности A, B и C, мы дважды учли каждый двукратный элемент и трижды — каждый трёхкратный. Вычтя три попарных пересечения, мы «восстановили справедливость» в отношении двукратных элементов, но теперь оказались полностью неучтёнными трёхкратные элементы. Поэтому надо добавить мощность тройного пересечения.

Приведём также доказательство этой формулы с помощью следующего рисунка.



Здесь x, y, z —количества однократных элементов (входящих лишь в одно из данных множеств); p, q, r —количества двукратных элементов; s — число трёхкратных элементов. Имеем: $|A \cup B \cup C| = x + y + z + p + q + r + s = (x + p + q + s) + (y + p + r + s) + (z + q + r + s) - (p + s) - (q + s) - (r + s) + s = = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Задача 6. В группе 40 туристов. Из них 20 человек говорят по-английски, 15 — по-французски, 11 — по-испански. Английский и французский знают семь человек, английский и испанский — пятеро, французский и испанский — трое. Два туриста говорят на всех трёх языках. Сколько человек группы не знают ни одного из этих языков? Решение. Пусть A —множество туристов группы, знающих английский, F — французский, I — испанский. Тогда $|A| = 20$, $|F| = 15$, $|I| = 11$, $|A \cap F| = 7$, $|A \cap I| = 5$, $|F \cap I| = 3$, $|A \cap F \cap I| = 2$. Сколько человек говорят хотя бы на одном из этих языков? По формуле включений и исключений для трёх множеств имеем: $|A \cup F \cup I| = |A| + |F| + |I| - |A \cap F| - |A \cap I| - |F \cap I| + |A \cap F \cap I| = = 20 + 15 + 11 - 7 - 5 - 3 + 2 = 33$. Значит, ни одного из данных языков не знают $40 - 33 = 7$ человек.
Правило произведения: пусть имеется $\boldsymbol{n}$ множеств $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, …, $\boldsymbol{A}_n$ содержащих $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$, …, $\boldsymbol{m}_n$ элементов соответственно. Число способов, которыми можно выбрать по одному элементу из каждого множества, равно $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n}$.

Пример 3. Если на первой полке стоит 5 книг, а на второй 10, то выбрать одну книгу с первой полки и одну со второй можно 5*10=50 способами.
Задача 6. Секретный код имеет следующий вид: сначала любая строчная буква русского алфавита, далее три цифры. Сколько существует кодовых комбинаций? Ответ: 33 * 10 * 10*10 = 33000.

Задача 7. Имеются три города: A, B и C. Из A в B ведут три дороги, из B в C — пять дорог. Сколько различных путей ведут из A в C? Прямого пути между A и C нет.

Решение. Обозначим дороги буквами и цифрами. Именно, дороги из A в B назовём a, b, c; дороги из B в C назовём 1, 2, 3, 4, 5. Тогда любой маршрут из A в C получает уникальное имя в виде пары из буквы и цифры. Например, маршрут b4 означает, что из A и B мы пошли по дороге b, а из B в C — по дороге 4. Выписав все такие пары, можем убедиться, что всего получилось $3 \cdot 5 = 15$ маршрутов. Как видим, число маршрутов равно произведению числа дорог из A в B на число дорог из B в C.

Задача 8. В магазине есть 7 видов пиджаков, 5 видов брюк и 4 вида галстуков. Сколькими способами можно купить комплект из пиджака, брюк и галстука?

Решение. Предположим, что пиджак уже выбран (это можно сделать 7 способами). К пиджаку выбираем брюки 5 способами. Итого пару (пиджак, брюки) можно выбрать $7 \cdot 5$ способами. К этой паре можно купить галстук 4 способами. Следовательно, для покупки пиджака, брюк и галстука имеется $7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$ способов.

Задача 9. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры чётные?
Решение. Представим себе пять последовательных позиций для цифр пятизначного числа. На первую позицию можно поставить четыре цифры: 2, 4, 6 или 8. На вторую позицию можно поставить пять цифр: 0, 2, 4, 6 или 8. На третью, четвёртую и пятую позиции можно поставить те же пять цифр: 0, 2, 4, 6 или 8. Всего имеем $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$ вариантов заполнения позиций; именно столько и будет искомых чисел.

Комбинирование правила суммы и произведения. Очень часто в практических задачах удается вычислить количество вариантов за счет умелого комбинирования этих двух правил.

Задача 10. Сколько трёхзначных чисел содержат ровно одну цифру 7?

Решение. Единственная цифра 7 может стоять либо на первом месте, либо на втором, либо на третьем. Соответственно находим количества чисел в каждом из этих случаев, после чего пользуемся правилом суммы. Найдём количество $n1$ трёхзначных чисел, у которых единственная цифра 7 будет первой. На второй и третьей позициях может стоять любая из цифр, кроме 7; следовательно, вторую и третью позицию мы можем заполнить $9 \cdot 9 = 81$ способами. Итак, $n1 = 81$. Теперь найдём количество $n2$ трёхзначных чисел, у которых единственная цифра 7 стоит на втором месте. Первая цифра может быть любой, кроме 0 и 7 (то есть 8 способов выбора). Вторая цифра — любая, кроме 7 (это 9 способов). Следовательно, $n2 = 8 \cdot 9 = 72$. Аналогично находим количество $n3$ трёхзначных чисел, у которых единственная цифра 7 стоит на третьем месте: $n3 = 8 \cdot 9 = 72$. По правилу суммы искомое количество чисел равно $n1 + n2 + n3 = 81 + 72 + 72 = 225$.

Задача 11. Сколько существует способов расставить на шахматной доске 8×8 белую ладью и чёрного короля так, чтобы ладья била короля, но король не бил ладью? Способы расстановки, получающиеся друг из друга поворотом доски, считаются разными.

Решение. Где бы ни стояла на доске ладья, она держит под боем ровно 14 клеток — 7 по горизонтали и 7 по вертикали. 4 Если король стоит в углу доски (таких клеток 4), то в своих горизонтали и вертикали он бьёт две клетки. Значит, ладью можно поставить на 12 клеток (рисунок слева). K K K Если король стоит на краю доски, но не в углу (таких клеток 24), то в своих горизонтали и вертикали он бьёт три клетки. Значит, ладью можно поставить на 11 клеток (рисунок в центре). Если же король стоит не на краю доски (таких клеток 36), то в своих горизонтали и вертикали он бьёт четыре клетки. В этом случае ладью можно поставить на 10 клеток (рисунок справа). Всего требуемых расстановок короля и ладьи получается $4 \cdot 12 + 24 \cdot 11 + 36 \cdot 10 = 672$.

Часто помощником в решении комбинаторных задач является переход к дополнению: число «нужных» элементов равно общему числу элементов минус число «ненужных» элементов. Применяется он в случае, когда подсчет числа нужных нам элементов затруднителен, а вот общее количество и количество «ненужных» подсчитать несложно.

Задача 12. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы один нуль?

Определим, сколько всего есть трехзначных чисел. Первая цифра может быть выбрана 9 способами (на первом месте не может стоять 0), остальные – 10 способами, то есть всего 9 * 10 * 10 = 900 трехзначных чисел по правилу произведения.

Посчитаем, сколько трехзначных чисел в своей записи не содержат 0. По правилу произведения таких чисел всего 9 * 9 * 9 = 729

По правилу суммы количество трехзначных чисел равно сумме количества трехзначных чисел без нулей и сумме количества трехзначных чисел с одним и более нулем. Следовательно, трехзначных чисел, содержащих хотя бы один 0: 900 - 729 = 171.

Задача 13. Сколько есть возможных позиций на шахматной доске, когда обе стороны сделали первый ход?

Решение: Каждая стороны может сделать ход либо пешкой, либо конем. Каждой пешкой можно сделать первый ход 2 способами, всего 8 пешек. По правилу произведения у одной стороны есть 2 * 8 = 16 способов хода пешкой. Каждым конем можно сделать ход 2 способами, всего 2 коня. По правилу произведения у одной стороны есть 2 * 2 = 4 способа хода конем. По правилу суммы получаем, что у каждой стороны есть 16 + 4 = 20 способов хода. Заметим, что первый ход белых не исключает никакого хода черных: никакое поле, куда могут пойти черные, не будет занято. Следовательно, по правилу произведения есть 20 * 20 = 400 возможных позиций.

Решая задачу, мы действовали по схеме, которую, выражаясь неформально, можно описать так: «хотя бы один» равно общему числу минус «ни одного». В других ситуациях можно действовать наоборот: «ни одного» равно общему числу минус «хотя бы один».

Выборки. Если из множества предметов выбирается некоторое подмножество, то его называют ***выборкой***. Выборки бывают ***упорядоченные*** и ***неупорядоченные***.

В упорядоченной выборке существенен порядок, в котором следуют ее элементы, другими словами, изменив порядок элементов, мы получим другую выборку.

Пример. Составьте всевозможные выборки из 2 элементов множества M ={a ,b ,c}. Решение. (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b) - это упорядоченные 2-выборки без повторений. Их, очевидно, всего 6. (a,a);(a,b); (a ,c); (b,b); (b,a); (b,c); (c,c); (c,a); (c,b) – упорядоченные 2-выборки с повторениями. Их всего 9. {a,b},{a,c},{b,c} - неупорядоченные выборки без повторений. Легко видеть, что их всего 3. [a,b]; [a,a]; [a,c];[b,b];[b,c]; [c,c] – неупорядоченные выборки с повторениями. Их всего 6.

<u>*Пример* </u>. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить следующие трехзначные числа 123, 431, 524, ...и т.д. Это упорядоченные трехэлементные выборки, так как 123 и 132 - разные числа.

<u>*Пример*</u>. Из 20 учащихся класса выбрать двух дежурных. Любая пара дежурных представляет собой неупорядоченную двухэлементную выборку, так как порядок их выбора не важен.

Задача 14. Учащиеся 6-го класса изучают 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день так, чтобы было 6 различных уроков?

Решение: Так как предметы в один день повторяться не могут, то первым можно выбрать один из 10 предметов, вторым – один из девяти и так далее, всего 10*9*8*7*6*5 способов. Здесь порядок предметов важен.

Задача 15. В шахматном кружке занимаются 16 человек. Сколькими способами тренер может выбрать из них для предстоящего турнира команду из трех человек?

Решение: Первого члена команды можно выбрать 16 способами, второго 15 способами, третьего 14 способами. Итого 16*15*14 Так как порядок участников внутри команды не важен, то это количество надо разделить на 3*2*1 – количество способов перемешать участников турнира внутри команды.

Копилка задач

1. Сколькими различными способами можно построить 9 солдат в шеренгу?
2. Сколько различных анаграмм можно получить, переставляя буквы в слове «черника»?
3. Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры в числе 14367?
4. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать
5. Сколькими различными способами можно из группы в 7 человек выбрать троих?
6. Сколькими различными способами можно из группы в 7 человек выбрать троих дежурных, один из которых – старший дежурный?
7. В магазине имеется 15 видов украшений для елки. Сколько различных комплектов подарков из 3 видов украшений можно скомпоновать?
8. Сколькими различными способами в классе из 25 человек можно назначить двух дежурных?
9. Сколькими различными способами в классе из 25 человек можно назначить двух дежурных, один из которых – старший дежурный?
10. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
11. Спортивный клуб насчитывает 30 членов, из которых надо выделить 4 человека для участия в забеге на 1000 метров. Сколькими способами это можно сделать?
12. Сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете 100 м + 200 м + 300 м + 400 м?
13. а) В Стране Чудес есть три города A, B и C. Из города A в город B ведет 6 дорог, а из города B в город C – 4 дороги. Сколькими способами можно проехать от A до C?

б) В Стране Чудес построили еще один город D и несколько новых дорог – две из A в D и две из D в C. Сколькими способами можно теперь добраться из города A в город C?

14. Номер автомашины состоит из трех букв русского алфавита (используется 30 букв) и трех цифр: сначала идет буква, затем три цифры, а затем еще две буквы. Сколько существует различных номеров автомашин?
15. У разведчика есть 7 сигнальных ракет разного цвета. Сколько условных сигналов 5 ракетами последовательно он сможет подать?

16. В некотором алфавите содержится 10 букв. Сколько слов из 4 различных букв можно составить?
17. Сколькими различными способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали среди 13 участников соревнований по художественному скалолазанию?
18. Соревнования по прыжкам через ров собрали 13 участников. Сколькими различными способами могут быть распределены 6 дипломов за успешное выступление?
19. У людоеда в подвале томятся 25 пленников.

а) Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин? Порядок важен.

б) А сколько есть способов выбрать троих, чтобы отпустить на свободу?

20. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?
21. У отца есть 5 различных книг, которые он дарит 8 сыновьям, причем каждому сыну – не более одной книги. Сколькими различными способами он может это сделать?
22. Сколькими различными способами можно записать в виде произведения простых множителей число 210?
23. Сколько различных анаграмм можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?
24. На окружности отмечено 10 различных точек. Сколько существует различных треугольников с вершинами в этих точках?
25. На окружности отмечено 10 различных точек. Сколько различных выпуклых четырехугольников можно провести с концами в отмеченных точках?
26. Сколькими различными способами можно расставить белые фигуры (два коня, два слона, две ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?
27. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день она выдает сыну по одному фрукту. Сколькими различными способами это может быть сделано?
28. В компании из 18 человек каждый обменялся с каждым рукопожатием. Сколько всего было рукопожатий?
29. В чемпионате Англии по футболу участвуют 22 команды в один круг (каждая команда играет с каждой по одной игре). Сколько всего игр английского чемпионата играется за один сезон?
30. На плоскости отметили 12 точек. Сколько можно провести различных отрезков с концами в данных точках?
31. На прямой отметили 15 точек. Сколько лучей с началом в данных точках можно провести на этой прямой?

32. Найти количество диагоналей у выпуклого 100-угольника.
33. В выпуклом 34-угольнике провели всевозможные диагонали. Оказалось, что любые три диагонали не проходят через одну точку. Найти количество точек пересечения этих диагоналей.
34. В продаже имеется 7 видов конвертов и 5 видов марок. Сколькими различными способами можно выбрать конверт с маркой?
35. У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?
36. Из пункта А в пункт В ведут 12 дорог, а из В в С – 5 дорог. Сколькими различными путями можно попасть из А в С через В?
37. Однажды 5 штангистов и 8 сумоистов встретились и сыграли каждый с каждым по одной партии в шашки. Сколько было партий в которых встречались штангист и сумоист?
38. Из 12 английских, 8 французских и 20 башкирских слов выбирают по одному слову каждого языка. Сколькими способами можно сделать этот выбор?
39. Сколькими способами можно выбрать четырех человек на четыре различные должности, если имеется девять кандидатов на эти должности?
40. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 0 (цифры можно повторять)?
41. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 0 (цифры можно повторять)?
42. Сколько различных трехзначных нечетных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 0 (цифры можно повторять)?
43. Сколько различных трехзначных четных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 0 (цифры можно повторять)?
44. Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на 5?
45. Сколькими различными способами можно из 5 старших, 8 младших научных сотрудников и трех лаборанток отправить в командировку 2 старших, 1 младшего научного сотрудников и двух лаборанток?
46. На почте продается 5 различных конвертов без марок и 4 марки. Сколькими способами можно выбрать конверт с двумя марками для отправки письма?
47. В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки класса требуется выделить трех девочек и четырех мальчиков. Сколькими различными способами это можно сделать?
48. В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Чтобы сделать уборку в классе, классный руководитель Виталия Юрьевна назначает 3 девочек или 4

мальчиков. Сколькими различными способами Виталия Юрьевна может назначить дежурных?

49. Из отдела, в котором работают 8 человек, шеф хочет направить двоих на уборку территории, а троих – на покраску забора. Сколькими различными способами он может это сделать?

50. Из отдела, в котором работают 8 человек, шеф хочет направить двоих на уборку территории или троих – на покраску забора. Сколькими различными способами он может это сделать?

51. Из класса, в котором учатся 30 человек, назначаются на дежурство в столовую 4 человека.

а) Сколькими способами это можно сделать?

б) Сколько существует способов набрать команду дежурных, в которую попадет ученик этого класса Егоров Назир?

52. Назовем натуральное число "симпатичным", если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует четырехзначных "симпатичных" чисел?

53. В обыкновенном наборе домино 28 косточек. Сколько косточек содержал бы набор домино, если бы значения, указанные на косточках, изменялись не от 0 до 6, а от 0 до 12?

54. Сколькими способами, двигаясь по следующей таблице от буквы к букве,

к

в в

а а а

д д д д

р р р р р

а а а а а а

т т т т т т т

можно прочитать слово "квадрат"?

55. Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

56. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы две одинаковых цифры?

57. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы две единицы?

58. В саду у Ани и Вити росло 2006 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три

куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?

59. По данным опроса, проведённого в 7 «В» классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются ещё и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 «В», если известно, что их больше 20, но меньше 30?

60. Пусть A — множество букв слова «абракадабра», B — множество букв слова «бригантина», C — множество букв слова «каракатица». Выпишите множества A, B и C, найдите их всевозможные пересечения и проверьте формулу включений и исключений для трёх множеств.

61. Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

62. Сколько чисел из набора 1, 2, . . . , 2010, 2011 не делятся ни на 3, ни на 7?

63. На столе рубашкой вверх была разложена колода из 36 игральных карт. Лёша перевернул 30 карт, затем Макс перевернул 19 карт, а после этого Боря — 21 карту. В результате вся колода оказалась рубашкой вниз. Сколько карт было перевёрнуто трижды?

64. Трое ребят принялись красить лист ватмана, каждый — в свой цвет. Один закрасил красным 75% листа, второй закрасил зелёным 70% листа, а третий закрасил синим 65% листа. Сколько процентов листа будет заведомо закрашено всеми тремя цветами? 10%

65. В группе 17 человек знают английский язык, 14 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 19 человек знают польский язык. При этом 34 человека в группе знают ровно один язык из перечисленных, а остальные — ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе?

66. В группе 15 человек знают английский язык, 16 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 21 человек знает польский язык. В группе нет людей, знающих три языка, и 23 человека в группе знают ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе знают ровно один язык из перечисленных?

67. В стране шесть городов: А, Б, В, Г, Д и Е. Их хотят связать пятью авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

68. В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

69. Класс из 20 учеников разделён на две половины так, что каждый школьник из первой половины дружит ровно с шестью одноклассниками, а каждый школьник из второй половины дружит ровно с четырьмя одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.
70. Уходя на работу, мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковёр в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

2. Основные формулы комбинаторики.

После того, как учащиеся приобрели первичные навыки решения комбинаторных задач, можно углубить соответствующие знания, рассмотрев формулы для нахождения числа сочетаний и размещений. Обычно учащиеся начинают работать с этими формулами к концу 7 класса, поэтому следующий материал рассматривается на занятиях кружка в 7-9 классах.

2.1 Размещения

Размещениями из ***n*** элементов по ***m*** элементов ($m < n$) называются комбинации, составленные из данных ***n*** элементов по ***m*** элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число размещений без повторений из ***n*** по ***m*** (n различных элементов) вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Размещениями с повторениями из ***n*** элементов по ***m*** называются *упорядоченные* ***m***-элементные выборки, в которых элементы могут ***повторяться***.

Число размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m \qquad (2.2)$$

<u>*Задача 1.*</u> Возьмем буквы ***Б, А, Р***. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получиться, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) буквы могут повторяться?

Решение.

1. Получатся следующие наборы: ***БА, БР, АР, АБ, РБ, РА***.

   По формуле (2.1) получаем: $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$ наборов.

2. Получатся наборы: ***ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА.***

   По формуле (2.2) получаем: $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9.$ наборов.

<u>*Задача 2.*</u> Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: "красный", "желтый", "зеленый"?

Решение: здесь порядок важен, поэтому нам надо применить формулу (2.2). Таким образом всего различных комбинаций 3^6=729. Действительно, каждому светофору ставится в соответствие один из трех возможных вариантов, и, по правилу произведения, получим общее количество вариантов 3*3*3*3*3*3=729.

2.1. Перестановки.

Перестановками из ***n*** элементов называются размещения из этих *n* элементов по ***n*** (Перестановки - частный случай размещений).

Число перестановок без повторений (*n* различных элементов) вычисляется по формуле:

$$P_n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n! \qquad (2.3)$$

Действительно, у нас есть n способов выбрать первый предмет. Далее у нас есть, независимо от того, как выбран первый предмет, n-1 способов взять второй предмет - в любом случае, это может быть какой угодно предмет, кроме первого выбранного. Затем есть n-2 способа взять третий предмет - он может быть какой угодно, кроме первых двух выбранных... и так далее. Итого, мы имеет n этапов выбора, на каждом из которых число вариантов равно (независимо от того, как сделан выбор на предыдущих этапах), соответственно, n, n-1, n-2,..., 1. Поэтому, согласно правилу произведения, мы получаем общее число перестановок из n элементов n(n - 1)(n - 2)(n - 3)…3*2*1., ч.т.д.

Комбинаторный смысл числа перестановок прост: сколькими способами можно упорядочить конечное n-элементное множество.

Пример 1. Сколько перестановок можно составить из 2-х-элементного множества? $P_2 = 2! = 2$. Действительно, существует две такие перестановки: (a,b), (b,a).

Пример 2. Из трехэлементного множества можно составить $P_3 = 3! = 6$ перестановок: (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a).

Задача 3. Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг? Искомое число способов равно числу перестановок из 5 элементов, т.е. $P_5 = 5! = 120$.

Если в перестановке из общего числа элементов n есть к различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент повторяется n_2 раз, k-й элемент - n_k раз, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, то такие перестановки называются **перестановками с повторениями** из n элементов.

Число перестановок с повторениями вычисляется по формуле:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!}. \qquad \textbf{(2.4)}$$

Предлагаем вам доказать эту формулу самостоятельно.

Задача 4. Возьмем буквы ***Б, А, Р***. Какие перестановки из этих букв можно получить? Сколько таких наборов получится, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) буква А повторяется два раза?

Решение.

1. Получатся наборы: ***БАР, БРА, АРБ, АБР, РАБ, РБА.***

   По формуле (2.3) получаем: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$ наборов.

2. Получатся наборы: ***БАРА, БРАА, БААР, ААРБ, ААБР, АБАР, АРАБ, АРБА, АБРА, РАБА, РААБ, РБАА.***

По формуле (2.4) получаем: $P_4(2,1,1) = \frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 3\cdot 4 = 12.$ наборов.

Задача 5._ Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в числе не повторялись?

Решение: В этой задаче мы имеем дело с числом перестановок без повторений, но на первом месте не может стоять 0, поэтому всего чисел 5*5!=600

Задача 6. Сколько существует пятизначных чисел, состоящих из цифр 7,8,9, в которых цифра 8 повторяется 3 раза, а цифры 7 и 9 по одному разу.

Решение. Каждое пятизначное число отличается от другого порядком следования цифр, причем $n_1=1$, $n_2=3$, а $n_3=1$, а их количество равна 5, т.е. является перестановкой с повторениями из 5 элементов. Их число находим по формуле (3)

$P_5(1,3,1) = \frac{5!}{1!\cdot 3!\cdot 1!} = 20$.

Задача 7. На карточках написаны буквы М,А,Т,Е,М,А,Т,И,К,А. Сколько различных 10-ти буквенных «слов» можно составить из этих карточек? (здесь и далее словом считается любая последовательность букв русского алфавита)

Решение. Перестановка двух букв М, осуществляемая P_2= 2 способами, трех букв А, осуществляемая P_3= 3!=6 способами и перестановка двух букв Т, осуществляемая P_2= 2 способами не меняет составленное из карточек слово.

$P_{10}(2,3,2) = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 151200$ слов.

Задача 8. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

Решение. Первая линия шахматной доски представляет собой 8 клеток, на которых и надо расположить эти 8 фигур. Различные варианты расположения будут отличаться только порядком фигур, значит, это будут перестановки с повторениями P_8 (2,2,2).

По формуле (2.4) получаем: $P_8(2,2,2) = \frac{8!}{2!2!2!} = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 2\cdot 2} = 5040$ способов.

Перестановки из общего числа элементов n , которые расположены по кругу называются **перестановками по кругу** из n элементов.

В строчку можно разместить 3 различных элемента 6-ю различными способами – их мы рассматривали выше ((a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a)), а по кругу получим только две различных возможности:

a a

b **O** c c **O** b

Тождественные перестановки Различные перестановки

c a a a

b **O** a c **O** b b O c c O b

Заметим, что n предметов можно переставлять n! способами, но так как перестановки, отличающиеся поворотом круга, считаются одинаковыми, то поэтому число перестановок по кругу из n элементов равно **n!/n=(n-1)!**

Задача 9. К одному человеку в гости пришли 6 его друзей. Все они ужинали за круглым столом. Время ужина пролетело незаметно, и хозяин сказал гостям, что он будет рад видеть их у себя за ужином столько раз, сколько различных перестановок за этим столом они смогут образовать. Друзья, конечно, согласились. Сколько раз придется кормить своих друзей ужином радушному хозяину?

Решение: Так как всего за круглым столом сидело 7 человек: 6 гостей и сам хозяин, то число перестановок равно **7!/7=**720. Т.е. 720 совместных ужинов.

Задача 10. В условиях предыдущей задачи у хозяина есть любимое место, с которого он решительно отказывается перемещаться. Сколько в этом случае совместных ужинов предстоит собравшимся?

Решение: Если некий человек будет сидеть на постоянном месте, то оставшихся 6 можно размещать как бы в строчку, поэтому число возможностей по прежнему равно 6! = 720.

Задача 11. В условиях задачи 9 есть два гостя, которые категорически отказываются сидеть рядом. Сколько в этом случае совместных посиделок предстоит собравшимся?

Решение: Найдем сначала число возможностей, при которых два определенных человека будут (“таки да!”) сидеть рядом друг с другом. Их можно считать за одного человека, т.е. нам надо как бы рассадить 6 человек по кругу. Это можно сделать 5! различными способами. Но двое особых людей, кроме того, тоже можно менять местами, поэтому полученное число следует умножить на 2!, всего получим 2!×5!. Это есть общее число возможностей разместить по кругу 7 человек, чтобы двое определенных из них всегда сидели рядом. Вычтем полученное число из общего числа возможностей и получим нужное число возможностей: 6! - 2!×5! = 720 - 240 = 480.

Задачи для самостоятельного решения:

1. В кинотеатр пришла компания из а)трёх; б) четырёх человек. Они купили билеты на соседние места в одном ряду. Выпишите все варианты, в каком порядке они могли сесть. Сколько вариантов получилось?

2. Сколько существует пятизначных чисел, в которых по одному разу встречаются цифры а) от 1 до 5; б) от 0 до 4.

3. В классе 25 учеников. а) Сколькими способами учитель физкультуры может построить их в шеренгу? б) А сколько у него есть способов сделать так, чтобы Петров стоял раньше Иванова? в) А сколько есть вариантов расстановки, в которых Петров и Иванов стоят подряд?

4. На празднование масленицы пришло 35 человек. Сколькими способами они могут встать в хоровод?

5. Сколько существует 9-значных чисел, в которых первые 5 цифр — это цифры от 1 до 5 в каком-то порядке, а последние 4 цифры — это цифры от 6 до 9 в каком-то порядке?

6. Четыре семьи, в каждой из которых 4 человека пришли в кинотеатр. Сколькими способами они могут усесться в ряду с 16-ю креслами, так чтобы члены каждой семьи сидели подряд?

7. В танцевальной группе 10 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами их можно разбить на пары? (Подразумеваются, конечно, пары мальчик-девочка.)

8. А сколько существует десятизначных чисел, в которых цифры от 1 до 5 встречаются по 2 раза? 9. В очереди за билетами стояли 15 человек. В какой-то момент касса закрылась на перерыв, а открылась соседняя касса. Люди образовали новую очередь. Оказалось, что номер каждого человека увеличился меньше, чем

вдвое (в частности, мог и уменьшиться). Сколькими способами можно образовать вторую очередь с таким условием?

10. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

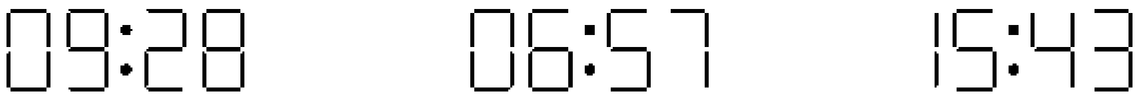
11. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4,

а) если каждая цифра может встречаться только один раз?;

б) если каждая цифра может встречаться несколько раз?

12. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Каково наименьшее количество номеров нужно перебрать, чтобы наверняка открыть камеру?

13. На рисунке приведены три примера показаний исправных электронных часов. Сколько палочек могут перестать работать, чтобы время всегда можно было определить однозначно?



2.2. Размещения.

Размещениями из ***n*** элементов по ***m*** элементов (*m* < *n*) называются комбинации, составленные из данных ***n*** элементов по ***m*** элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число размещений без повторений из ***n*** по ***m*** (*n* различных элементов) вычисляется по формуле:

$$\grave{A}_n^k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad \textbf{(2.1)}$$

Доказательство: Для подсчета $\grave{A}_n^k$ используем тот же метод, что использовался для подсчета Pn ,только здесь возьмем лишь k предметов. Первый предмет можно выбрать n способами (любой из n данных предметов), второй, при выбранном первом, можно выбрать n-1 способам. Можно продолжать этот процесс до выбора последнего k-го предмета. Этот предмет при выбранных первых k-1 предметов можно выбрать n-(k-1) способами (или n-k+1). Таким образом все k предметов выбираются числом способов, равным n(n-1)(n-2). . . (n-k+1).Что и требовалось доказать.

Размещениями с повторениями из ***n*** элементов по ***m*** называются *упорядоченные* ***m***-элементные выборки, в которых элементы могут ***повторяться***.

Число размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$\tilde{A}_n^k = n^k$

<u>*Задача 1.*</u> Возьмем буквы ***Б, А, Р***. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получиться, если: а) буквы в наборе не повторяются; б) буквы могут повторяться?

Решение.

а)Получатся следующие наборы: ***БА, БР, АР, АБ, РБ, РА***.

По формуле (2.1) получаем: $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$ наборов.

б)Получатся наборы: ***ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА.***

По формуле (2.2) получаем: $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9.$ наборов.

<u>*Задача 2.*</u> Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: "красный", "желтый", "зеленый"?

Решение: здесь порядок важен, поэтому нам надо применить формулу (2.2). Таким образом всего различных комбинаций 3^6=729. Действительно, каждому светофору ставится в соответствие один из трех возможных вариантов, и, по правилу произведения, получим общее количество вариантов 3*3*3*3*3*3=729.

Задача 3. Ученики 8 класса изучают 18 различных предметов. Определить – сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в понедельник планируется поставить 6 уроков?
Решение: Каждый вариант расписания представляет собой выборку 6 элементов из 18, причем эти варианты отличаются друг от друга не только выбором этих

элементов, но и порядком их следования, т.е. является размещением из 18 элементов по 6. $\tilde{A}_{10}^{5}$= 18!/(18-6)! = 18*17*16*15*14*13 **.**

Задача 4. Сколько существует различных вариантов выбора 4-х кандидатур из 9-ти участников кружка для поездки на 4 различных олимпиады?

Решение: $\grave{A}_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3024$**.**

Задача 5. Среди 25 учащихся 8 класса проводился конкурс на «Самого умного», «Самого доброго», «Самого смелого» и «Самого умелого». Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные призы?
Решение: Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию 4 участников из 25, отличающуюся от других комбинаций как составом номинантов, так и их порядком, причем один и тот же участник может быть номинантом несколько раз. Т.е. мы имеем дело с размещением с повторениями из 25 элементов по 4. Их число находим по формуле (2.6) $\tilde{A}_{25}^{4}=25^4$.
Можно было рассуждать иначе: победителем в первой номинации может быть любой из 25 учеников, победителем во второй номинации может быть также любой из 25 учеников, ведь один участник может быть номинантом несколько раз, победителями в третьей и четвертой номинациях опять может быть любой из 25 учеников. Следовательно, общее число вариантов распределения призов существует **25*25*25*25=25⁴.**
Задача 6. Сколько 6-значных чисел можно составить, используя цифры 3,4,5.
Решение: Все шестизначные числа, составленные из этих чисел отличаются друг от друга либо самими цифрами, либо порядком их следования. Следовательно они являются размещениями с повторениями из 3 элементов по шесть, т.е $\overline{A}_3^6 = 3^6 = 729$**.**
Этот же результат можно было получить, используя правило умножения: каждую цифру можно выбрать 3 способами. Всего получается $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 729$.

2/3 Сочетания.

Сочетания

Сочетаниями из n элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных ***n*** элементов по ***m*** элементов, которые различаются хотя бы одним элементом (отличие сочетаний от размещений в том, что в сочетаниях не учитывается порядок элементов).

Число сочетаний без повторений (***n*** различных элементов, взятых по ***m***) вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \textbf{(1)}$$

Число сочетаний с повторениями (***n*** элементов, взятых по ***m***, где элементы в наборе могут повторяться) вычисляется по формуле:

$$\tilde{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \quad (2)$$

Остановимся подробнее на рассмотрении этих двух формул.

Число сочетаний из *n* по *k* показывает, сколькими способами мы можем выбрать *k* элементов из *n* элементов, или сколькими способами мы можем расположить *k* объектов по *n* местам.

Легко заметить, что

$$A_n^k = C_n^k * k!$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Задача 1. *В коробке лежат 8 красных карандашей и 4 синих.*
А) сколько способов выбрать 4 карандаша из коробки?
Б) сколько способов выбрать 2 синих и 2 красных карандаша из коробки?

Решение.

Всего в коробке 12 карандашей. Найдем, сколькими способами можно извлечь из коробки 4 карандаша. Так как нас не интересует порядок, в котором карандаши извлекаются из коробки, а только состав карандашей, это число равно числу сочетаний из 12 по 4:

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!4!} = \frac{8!*9*10*11*12}{8!*1*2*3*4} = \frac{9*5*11}{1} = 495$$

Из 8 красных карандашей можно извлечь два карандаша $C_8^2 = \frac{8!}{6!*2!} = 28$ способами.

Из 4 синих карандашей можно извлечь два карандаша $C_4^2 = \frac{4!}{2!*2!} = 6$ способами.

По правилу произведения получаем, что извлечь 2 синих и 2 красных карандаша

можно 28*6 способами.

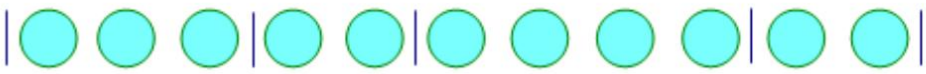
Метод шаров и перегородок

Задача 2. *Сколькими способами можно разложить 10 шаров в 4 коробки? Предполагается, что некоторые коробки могут оказаться пустыми.*

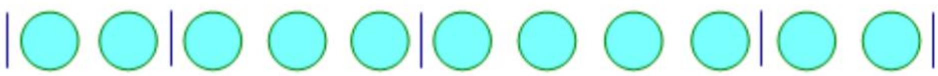
Решение.

Рассмотрим 10 шаров:

Будем "раскладывать шары по коробкам", ставя перегородки. Например, так:



В этом примере в первой коробке 3 шара, во второй - 2, в третьей - 4, и в четвертой - 2. Переставляя шары и перегородки, мы получаем различные комбинации шаров в коробках. Например, переставив последний шар в первой коробке и первую внутреннюю перегородку, мы получим такую комбинацию:



Таким образом, мы получаем различное число шаров в коробках, комбинируя позиции 10-ти шаров и 3-х внутренних перегородок. Чтобы определить, сколько различных комбинаций мы можем получить, нам нужно найти число сочетаний из 13 по 3. (Или, что то же самое, что число сочетаний из 13 по 10.) Столько способов выбрать 3 места для перегородок из 13 возможных позиций. Или, что то же самое,

10 мест для шаров.

Задача 3. *Сколько решений имеет уравнение* $x_0 + x_1 + \cdots + x_9 = 4$ *в целых неотрицательных числах?*

Решение.

Так как переменные могут принимать только целые неотрицательные значения, следовательно, у нас есть 10 переменных, и они могут принимать значения 0, 1, 2, 3 и 4. Представим, что у нас есть 10 коробок (это переменные), и мы должны разложить по этим коробкам 4 шара. Сколько шаров попадет в коробку, таково значение соответствующей переменной. Если у нас 10 коробок, следовательно, 10-1=9 внутренних перегородки. И 4 шара. Всего 13 мест. Нам надо расположить на этих 13 местах 4 шара. Число таких возможностей:

$C_{13}^{4} = 10 * 11 * 12 * 13 = 17160$

В общем случае, если нам нужно разложить n шаров в k коробок, мы получаем комбинации из n шаров и k-1 внутренней перегородки. И число таких комбинаций равно числу сочетаний из n+k-1 по k-1.

$$C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}$$

В этой задаче мы имели дело с *сочетаниями с повторениями.*

Сочетания с повторениями

Сочетаниями из n элементов по k элементов с повторениями называются группы, содержащие k элементов, причем каждый элемент принадлежит к одному из n типов.

Что такое сочетания из n элементов по k элементов с повторениями можно понять с помощью такого мысленного эксперимента. Представим ящик с пронумерованными шарами. Мы вынимаем шар, записываем его номер и возвращаем обратно, и так k раз. В отличие от размещений с повторениями нас не интересует порядок записанных чисел, а только их состав. Например, группы чисел {1,1,2,1,3,1,2} и {1,1,1,1,2,2,3} считаются одинаковыми. Сколько таких групп из k номеров мы можем получить?

В конечном итоге нас интересует, сколько элементов каждого типа (всего *n* типов элементов) содержится в каждой группе (из *k* элементов), и сколько таких различных вариантов может быть. То есть мы находим, сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение

$$x_0 + x_1 + \dots + x_9 = k$$

- задача аналогична задаче по раскладыванию *n* шаров в *k* коробок.

Число сочетаний с повторениями находится по такой формуле:

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^k.$$

Таким образом, число сочетаний с повторениями - это количество способов представить число k в виде суммы n слагаемых.

Задача 4. В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

Решение. Обозначая булки белого и черного хлеба буквами Б и Ч, составим несколько выборок: ББББББ, ББЧЧББ, ЧЧЧЧЧБ, ... Состав меняется от выборки к выборке, порядок элементов несущественен, значит это - сочетания с повторениями из 2 по 6. По формуле получаем $\tilde{C}_2^6 = C_{2+6-1}^6 = C_7^6 = C_7^1 = 7$ способов.

Сделаем проверку и выпишем все варианты покупки: ББББББ, БББББЧ, ББББЧЧ, БББЧЧЧ, ББЧЧЧЧ, БЧЧЧЧЧ, ЧЧЧЧЧЧ. Их действительно 7.

Задача 5. Труппа театра состоит из 20 артистов. Сколькими способами можно выбрать из нее в течение двух вечеров по 6 человек для участия в спектаклях так, чтобы ни один артист не участвовал в двух спектаклях?

Ответ $C_{20}^6 \cdot C_{14}^6$ способами.

Задача 6. Переплетчик должен переплести 12 одинаковых книг в красный, зеленый или синий переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

Подсказка

Задача эвивалентна задаче о разложении 12 шаров по трем ящикам.

Ответ $C_{14}^2 = 91$ способом.

Задача 7. Сколько существует десятизначных чисел, сумма цифр которых равна а) 2; б) 3; в) 4?

Подсказка: Разберите все возможные представления чисел 2, 3, 4 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых.

Решение:

а) На первом месте однозначно должна стоять единица, далее все очевидно.

б) 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1.

Есть одно число, состоящее из тройки и 9 нулей, C_9^2 = 36 чисел из 3 единиц и 7 нулей и 18 чисел из двойки, единицы и 8 нулей.

в) 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1. Покажем, например, как подсчитать количество чисел из двойки, двух единиц и 7 нулей. Есть C_9^2 вариантов выбрать 7 из 9 мест для нулей и в каждом из них – 3 варианта расставить на оставшиеся 3 места двойку и две единицы.

Ответ

а) 10; б) 55; в) $1 + 2 \cdot 9 + 9 + 3C_9^2 + C_9^3 = 220$ чисел.

Задача 8. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 11 точек. Сколько существует а) треугольников; б) четырехугольников с вершинами в этих точках?

Подсказка: Две вершины треугольника должны лежать на одной прямой, а одна – на другой.

Ответ

а) $10 \cdot C_{11}^2 + 11 \cdot C_{10}^2 = 1045$ треугольников; б) $C_{11}^2 \cdot C_{10}^2 = 2475$ четырехугольников.

Задача 9. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

а) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

б) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

Подсказка

а) Она может побывать или не побывать на каждом из 28 некрайних полей.

б) Надо выбрать 6 полей, на которых она сделает остановки.

Ответ

а) 2^{28}; б) C_{28}^{6} способами.

Схема определения вида комбинации:

Домашнее задание:

1. В обыкновенном наборе домино 28 косточек. Сколько косточек содержал бы набор домино, если бы значения, указанные на косточках, изменялись не от 0 до 6, а от 0 до 24?
2. Человек имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает к себе в гости каких-то троих из них так, чтобы компания ни разу не повторялась. Сколькими способами он может это сделать?
3. В парламенте 30 депутатов. Каждые два из них либо дружат, либо враждуют, причем каждый дружит ровно с 6 другими. Каждые 3 депутата образуют комиссию. Найдите общее число комиссий, в которых все три члена попарно дружат или все трое попарно враждуют.
4. Нарисуйте на плоскости 6 точек так, чтобы они служили вершинами ровно для 17 треугольников.
5. Двадцать городов соединены 172 авиалиниями. Доказать, что, используя эти авиалинии, можно из любого города перелететь в любой другой (быть может, делая пересадки).

Определение: **Сочетаниями** из n элементов по m элементов будем называть любое подмножество, состоящие из m элементов, множества , состоящего из n элементов. Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается $\tilde{N}_n^k$ (читается "це из эн по ка").

Число сочетаний из n элементов по m вычисляется по формуле

Формула (7) может быть получена следующим образом. Выберем по очереди m предметов из n. Мы это можем сделать $\grave{A}_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ способами. Однако нас не интересует в данном случае порядок выбранных предметов. От перестановки этих предметов наш выбор не меняется. Поэтому полученное выражение нужно разделить на m!

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(\mathrm{n-m})!} \qquad (7).$$

Примеры 1.6.1.

1. Из группы 35человек нужно выбрать троих для работы в колхозе. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Если выбирать их последовательно, то получим $35\cdot34\cdot33$варианта. Но так как для нас порядок выбора не имеет значения, а имеет значение только состав выбранной бригады, поэтому полученный результат нужно еще разделить на 3!. Т.е. получим $\dfrac{35\cdot34\cdot33}{3!}=6545$вариантов. Или можно было сразу воспользоваться формулой $C_{35}^3=\dfrac{35!}{3!\cdot(35-3)!}=6545.$

2. В середине 60 годов в России появилась лотерея, которая была названы “Спортлото”: лотерея 5/36 . Играющий покупал билет, на котором имелось 36 клеточек. Каждая клеточка соответствовала какому-либо виду спорта. Нужно было выделить (зачеркнуть) 5 из этих клеточек и отправить организаторам лотереи. После розыгрыша лотереи объявлялись пять выигравших номеров. Награждался угадавший все пять номеров, четыре номера и даже угадавший три номера. Соответственно, чем меньше угадано номеров (видов спорта), тем меньше был выигрыш.

Подсчитаем, сколько существует разных способов заполнения карточек “Спортлото” при условии, что используется лотерея 5/36. Казалось бы, заполняя последовательно номер за номером, получим: $36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32$. Но ведь порядок заполнения не имеет значения, тогда получаем:

$C_{36}^5=\dfrac{36!}{5!\cdot31!}=376992.$

Данный результат означает, что если все участники лотереи заполняют карточки по-разному, то в среднем один из примерно 377 тысяч человек угадает все 5 номеров.

А сколько человек в среднем угадают 4 номера? $C_5^4 \cdot \tilde{N}_{31}^1 = \frac{5!}{4!\cdot 1!} \cdot \frac{31!}{1!\cdot 30!} = 31 \cdot 5 = 155$.
Итого, в среднем 155 человек из примерно 377 000 угадают 4 номера.

Определение: сочетания, содержащие m элементов, в которых любой элемент может присутствовать некоторое число раз, не превосходящее m, называются ***сочетаниями из n элементов по m с повторениями***.

Например: соединения {a, a}, {a, b}, {a, c}, {b, b}, {b, c}, {c, c} – *сочетания из 3 элементов* {a, b, c} *по два с повторениями* (в соединение могут входить два одинаковых элемента).

Подсчет числа сочетаний с повторениями осуществляется по формуле :

$$\overline{C_n^m} = \frac{(m+n-1)!}{m!\cdot(n-1)!} = C_{m+n-1}^m \qquad \textbf{(8).}$$

Примеры 1.6.2.

1.Сколькими способами можно выбрать 4 монеты из четырех пятикопеечных монет и из четырех двухкопеечных монет?

Решение: порядок выбора монет неважен, и примерами соединений могут являться {5,5,5,5}, {2,2,2,2}, {5,2,5,5} и т.д. Это задача о числе сочетаний из двух видов монет по четыре с повторениями.

$$\overline{C_2^4} = \frac{(4+2-1)!}{4!\cdot(2-1)!} = 5 \text{ способов.}$$

2. В кондитерской имеется 5 разных сортов пирожных. Сколькими способами можно выбрать набор из 4 пирожных?

Решение: это задача о числе сочетаний из 5 видов пирожных по 4 с повторениями.

$$\overline{C_5^4} = \frac{(4+5-1)!}{4!\cdot(5-1)!} = 70 \text{ способов}$$

3. Сколько всего чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, в каждом из которых цифры расположены в неубывающем порядке?

Решение: это задача о числе сочетаний из 5 цифр по одному, по два, по три, по четыре и по пяти с повторениями в каждом случае.

$$\overline{C_5^1} = \frac{(1+5-1)!}{1!\cdot(5-1)!} = 5; \quad \overline{C_5^2} = \frac{(2+5-1)!}{2!\cdot(5-1)!} = 15; \overline{C_5^3} = \frac{(3+5-1)!}{3!\cdot(5-1)!} = 35;$$

$$\overline{C_5^4} = \frac{(4+5-1)!}{4!\cdot(5-1)!} = 70; \overline{C_5^5} = \frac{(5+5-1)!}{5!\cdot(5-1)!} = 126$$

Согласно правилу сложения: 5+15+35+70+126=251 чисел.

1.7. Сходства и различия в определениях сочетаний и размещений.

Сходства. Сочетания и размещения – это подмножества, состоящие из m элементов n-элементного множества. В них имеет значение порядок следования элементов последовательности.

Различия. В размещении важен порядок расположения элементов, а в сочетаниях порядок не важен.

Рассмотрим несколько «параллельных» задач:

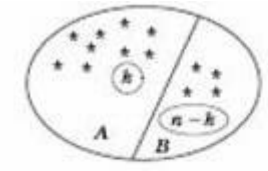
Сочетания	Размещения
1. Сколько рукопожатий получится, если здороваются 6 человек? {Дима, Антон} = {Антон, Дима} – одно и тоже Значит, порядок неважен, значит это подмножество по два элемента из 6, значит это сочетание из шести по два $C_6^2=\frac{6!}{(6-2)!2!}=\frac{6\cdot5}{2}=15$	1. Сколькими способами шесть человек могут обменяться фотографиями? { Дима, Антон } ≠ { Антон, Дима } – разные обмены Значит, порядок важен, значит это последовательность по два элемента из 6, значит это размещение из шести по два $A_6^2=\frac{6!}{(6-2)!}=5\cdot6=30$
2. Сколько аккордов можно сыграть с помощью трех клавиш из семи? {до, ми, соль} = { до, соль, ми } – одно и тоже Значит, порядок неважен, значит это подмножество по три элемента из	2. Сколько мелодий (трезвучий, проигрышей) можно сыграть с помощью трех клавиш из семи? {до, ми, соль} ≠ { до, соль, ми } – разные мелодии Значит, порядок важен, значит это

семи, значит это сочетание из семи по три $C_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!3!} = \dfrac{4\cdot 5}{2} = 10$	последовательность по три элемента из семи, значит это размещение из семи по три $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$

СВОЙСТВА СОЧЕТАНИЙ.
ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

Числа C_n^k обладают многими интересными свойствами. Перечислим наиболее известные из них.

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$



Это можно проверить с помощью формулы:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

Но интереснее и полезнее можно доказать это свойство, используя определение числа сочетаний. Чтобы выбрать k элементов из множества в n элементов, можно указать те из них, которые останутся, не будут выбраны. Если мы выбираем k элементов, то остается $n-k$. Поэтому число выборок по k элементов (из n) равно числу выборок по $n-k$ элементов.

2) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

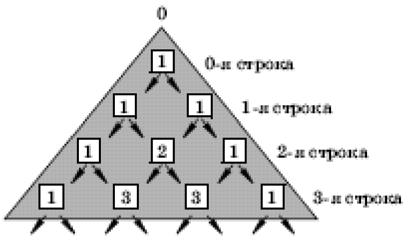
Подсчитаем двумя способами общее возможное число выборок из множества, содержащего n элементов (число всех подмножеств n - элементного множества).
С одной стороны это число равно 2^n – для каждого элемента есть две возможности: попасть или не попасть в выбираемое подмножество, причем для каждого элемента эти возможности выбираются независимо друг от друга.
Это же число можно получить иначе – сначала зафиксировать число k элементов в подмножестве. Получим число C_n^k, а затем сложим по всем k, чтобы найти общее число вариантов.

3) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. – рекуррентное соотношение, связывающее числа сочетаний.

Представим себе, что к n элементам данного множества мы добавили еще один, и из полученного множества хотим выбрать подмножество из $k+1$

элемента. По определению это число равно C_{n+1}^{k+1}. Все эти выборки мы разобьем на два сорта – те, которые содержат один добавленный элемент, и те, которые его не содержат. Первых будет C_n^k штук (один элемент уже взят, а из остальных надо взять еще k), а вторых – C_n^{k+1} (все $k+1$ элементов берутся из исходного множества). Тем самым $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. Это равенство лежит в основе построения так называемого треугольника Паскаля, позволяющего быстро вычислять числа сочетаний C_n^k для небольших значений n.

Треугольник Паскаля – это треугольник из целых чисел, по боковым сторонам которого стоят единицы, а каждое число внутри треугольника равно сумме двух чисел, стоящих над ним.



Легко заметить, что в n-ой строке треугольника Паскаля на k–ом месте (места нумеруем с нуля) стоит число C_n^k. Действительно, на сторонах треугольника стоят единицы, так как $C_n^0 = C_n^n = 1$ (добавим еще $C_0^0 = 1$), а над элементом C_{n+1}^{k+1} стоят элементы C_n^k и C_n^{k+1}. Так как $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$, то мы видим, что закон образования элементов треугольника из чисел сочетаний совпадает с законом образования элементов треугольника Паскаля.
Полезно заметить, что в треугольнике Паскаля самый большой элемент строки стоит в ее середине (он один при четном n и их два одинаковых при нечетном n).
При этом члены строки возрастают к ее середине, а потом убывают.
Рассматривая треугольник Паскаля, можно обнаружить много новых свойств сочетаний.

4) $C_n^k = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1}$ – еще одно рекуррентное соотношение.

Решим двумя способами следующую задачу: из группы в n человек надо выбрать команду в k человек и среди них назначить одного капитана команды.

Сначала можно выбрать всю команду (число способов – C_n^k) и из нее выбрать капитана (k способов). Всего получится $k \cdot C_n^k$ способов.
Можно сначала из всей группы выбрать капитана (n способов), а затем из

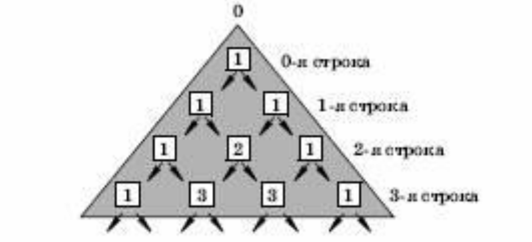
оставшихся выбрать $k-1$ рядовых членов команды (C_{n-1}^{k-1}) – всего $n \cdot C_{n-1}^{k-1}$ способов.

Результат: $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$, т. е. $C_n^k = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1}$.

Самые популярные задачи на применение числа сочетаний.

Задача 1. Доска Гальтона и равенство $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Представим себе частицу, которая на каждом шаге (например, через 1 секунду) распадается на 2, и эти половинки попадают в две заготовленные корзины. Число корзин на каждом шаге увеличивается на 1. Получим схему, изображенную на рисунке. На n-ом шаге во всех корзинах вместе будет 2^n частиц (на каждом шаге число частиц удваивалось), а число частиц в одной корзине равно сумме этих чисел в двух корзинах, расположенных выше этажом. Поэтому число частиц в k-ой корзине ($k = 0, 1, \ldots, n$) на n-ом шаге равно C_n^k.



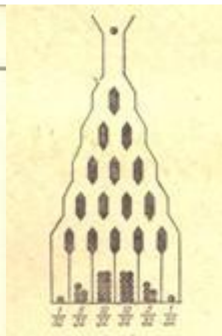


Рис. 8. Доска Гальтона.

Существует устройство – доска Гальтона, демонстрирующая эту идею. Ее изображение вынесено на обложку известной книги из библиотечки журнала «Квант»: А.Н. Колмогоров, И.Г. Журбенко, А.В. Прохоров. «Введение в теорию вероятностей».

Задача 2. Число анаграмм.

Как подсчитать число анаграмм для слова с повторяющимися буквами, например, для слова колокол. Общее число букв – 7, из них 3 различных –
к (повторяется 2 раза), л (2 раза) и о (3 раза).

Вычислим число анаграмм способом, аналогичным тому, которым мы находили формулу для числа C_n^k. Пусть искомое число анаграмм равно x. Теперь сделаем одинаковые буквы разными (например, запишем их разными шрифтами). «Размножая» букву к, мы удвоим число анаграмм, затем, делая ту же операцию для буквы л, мы снова удвоим, а переставляя три по-разному записанные буквы о, мы увеличим число вариантов в $3! = 6$ раз. В итоге получим все анаграммы слова из 7 различных букв. Итак, $x \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3! = 7!$, откуда $x = \frac{7!}{2 \cdot 2 \cdot 3!}$.

Проделывая то же рассуждение в общем виде, получим следующую полезную

формулу. Пусть у нас есть n объектов k различных видов. Пусть первый вид повторяется n_1 раз, второй – n_2 раз, …, k-ый – n_k раз.
(Разумеется, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.) Число перестановок этих объектов равно $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

Применим эту формулу к следующей задаче.
Сколько есть семизначных чисел, имеющих в записи две двойки, три тройки и две пятерки?
Задача сводится к стандартной задаче об анаграммах с повторяющимися буквами .
Ответ: $\dfrac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210$.

Задача 3. Распределение билетов.
В классе 20 человек. Мы хотим пятерым из них дать билеты в театр. Каким числом способов это можно сделать?
Сначала выберем тех пятерых, которые пойдут в театр. Пусть это можно сделать x способами. Затем рассадим эту пятерку на места (раздадим билеты). Это можно сделать $5!$ способами (пример 6). Общее число вариантов получим по правилу произведения: $x \cdot 5!$. Сравнивая два ответа $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = x \cdot 5!$, найдем x : $x = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15 \cdot 504$.
Мы нашли число сочетаний (выборок, подмножеств) из 20 элементов по 5 : $C_{20}^5 = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5!}$.

Задача 4. Секретный код.
Секретный код составляется из двух букв и трех цифр. При этом буквы выбираются из 5 различных и могут повторяться, а цифры – из 10 возможных и должны быть различными. Сколькими способами мы можем составить 3 различных кода?
Общее число кодов: $n = 5^2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 18 \cdot 10^3$ – мы на двух первых местах размещаем буквы (независимо друг от друга), а на следующих трех местах – цифры без повторений.
Из полученного множества кодов мы должны выбрать (одновременно) три. Это можно сделать C_n^3 способами. При $n = 18 \cdot 10^3$ это число равно $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = 6 \cdot 10^3 \cdot 17999 \cdot 17998 = 1943676012 \cdot 10^3 x \approx 2 \cdot 10^{12}$.

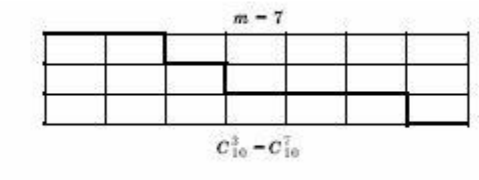
Задача 5. Задача о монетах и карманах.

Каким числом способов можно разложить 10 одинаковых монет в 3 различных кармана?

Задача совпадает с задачей представления числа 10 в виде упорядоченной суммы трех неотрицательных слагаемых. (Каждое слагаемое – число монет в соответствующем кармане.) Используем готовую формулу .

Ответ: $C_{12}^2 = 66$.

Задача 6. Схема блуждания по городу.



Город разбит на блоки горизонтальными и вертикальными улицами. Каким числом способов можно пройти кратчайшим путем из одного угла города в противоположный?

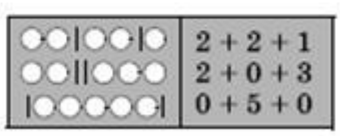
Пусть число блоков в горизонтальном направлении равно n, а в вертикальном – m (число улиц в каждом направлении на 1 больше). Полный путь содержит $m+n$ шагов (движение вдоль одного блока), из которых m должно быть сделано по вертикали, а n – по горизонтали. Общее число путей равно числу выборок из $m+n$ шагов тех m, которые будут сделаны по вертикали (остальные – по горизонтали). Ответ: $C_{m+n}^m = C_{m+n}^n$.

Задача 7. Число одночленов.

Сколько есть различных одночленов степени n с k буквами (коэффициент считаем равным 1).

Одночлен степени n с k буквами записывается в виде $x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}$

где $n_1 + \ldots + n_k = n$. Он определяется упорядоченным представлением числа n в виде суммы k неотрицательных слагаемых. (Упорядоченное означает, что, например, представления $2+1+1$ и $1+2+1$ мы считаем различными.)



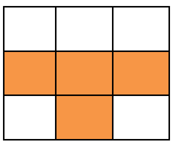
Итак, подсчитаем число упорядоченных представлений числа n в виде суммы k неотрицательных слагаемых. Изобразим число n в виде набора n одинаковых символов (кружков). Поставим между этими символами одну перегородку (палочку). Она определит разбиение числа n на сумму двух слагаемых. Чтобы получить k слагаемых, надо поставить $k-1$ перегородку . Теперь мы должны переставить между собой n кружков и $k-1$ перегородку. Можно считать, что у нас есть $n+k-1$ мест, и мы должны выбрать те n мест, где стоят кружки (или же $k-1$ мест, где стоят перегородки). Это можно сделать $C_{n+k-1}^n = C_{n+k-1}^{k-1}$ способами.

При $n=4$, $k=3$ получаем число $C_6^4 = C_6^2 = 15$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. На некоторые клетки квадратной доски выкладывают стопкой золотые монеты, а на остальные – серебряные. Можно ли положить монеты так, чтобы в каждом квадрате 3х3 серебряных монет было больше, чем золотых, а на всей доске золотых больше, чем серебряных.
2. А если доска 5х5, и требуется, чтобы в каждом квадрате 3х3 серебряных было больше, а на всей доске золотых было больше.
3. Десять футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате у каждой команды оказалось ровно по х очков. Каково наибольшее возможное значение х? (Победа – 3 очка, ничья – 1 очко, поражение – 0.)
4. Какое наименьшее возможное значение х?
5. Какое наибольшее значение х в случае 9 команд?
6. В какое наибольшее количество цветов можно раскрасить клетки шахматной доски 8х8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками того же цвета?
7. Тот же вопрос для доски 3х3.
8. Какое наименьшее количество уголков можно разместить в квадрате 8х8 так, чтобы в этот квадрат больше нельзя было поместить ни одного уголка?
9. Какое наибольшее число королей можно расставить на доске 8х8 так, чтобы они не били друг друга?
10. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на шахматной доске так, чтобы с любой из них на любую другую отмеченную клетку можно было пройти ровно двумя ходами шахматного коня?
11. Можно ли расставить в клетках шахматной доски натуральные числа от 1 до 64 так, чтобы сумма чисел в любой четырехклеточной букве Т была кратна пяти.

Как выглядит четырехклеточная буква т? Вот как.



Ее можно поворачивать в любую сторону.

1.8. Свойства сочетаний. Бином Ньютона.

Предполагая, что n и k - целые положительные числа и 0!=1, сформулируем основные свойства сочетаний.

1. $C_n^0 = C_n^n = 1.$

2. $C_n^m = C_n^{n-m}.$

Доказательство: $\tilde{N}_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} \Rightarrow C_n^{n-m} = \dfrac{n!}{(n-m)!\cdot(n-(n-m))!} = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = C_n^m$. Что и требовалось доказать.

3. $\tilde{N}_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m.$

Доказательство:

$$C_n^{m+1} + C_n^m = \frac{n!}{(n-m-1)!\cdot(m+1)!} + \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = \frac{n!\cdot(n-m+m+1)}{(n-m-1)!\cdot m!\cdot(m+1)\cdot(n-m)} = \frac{(n+1)!}{(n-m)!\cdot(m+1)!} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Что и требовалось доказать.

4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots C_n^n = 2^n.$

Свойство №3 позволяет описать процедуру последовательного получения числа сочетаний при различных значениях n и m. Используя это свойство, можно представить число сочетаний в виде так называемого треугольника Паскаля.

$\tilde{N}_2^1 = \tilde{N}_1^1 + \tilde{N}_1^0 = 2.$

$\tilde{N}_3^1 = \tilde{N}_2^1 + \tilde{N}_2^0 = 2+1=3;\ \tilde{N}_3^2 = \tilde{N}_2^2 + \tilde{N}_2^1 = 1+2=3;$

$\tilde{N}_4^1 = \tilde{N}_3^1 + \tilde{N}_3^0 = 3+1=4;\ \tilde{N}_4^2 = \tilde{N}_3^2 + \tilde{N}_3^1 = 3+3=6;\ \tilde{N}_4^1 = \tilde{N}_3^1 + \tilde{N}_3^0 = 3+1=4;$

Тогда треугольник Паскаля имеет вид

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

....

Треугольник Паскаля обладает таким свойством, что каждый элемент строки, кроме крайних, равен сумме двух элементов, стоящих над ним в предыдущей строке. В начале и в конце каждой строки стоят единицы.

Треугольник Паскаля, записанный с помощью чисел сочетаний, выглядит так:

$$\tilde{N}_0^0$$

$$\tilde{N}_1^0 \quad \tilde{N}_1^1$$

$$\tilde{N}_2^0 \quad \tilde{N}_2^1 \quad \tilde{N}_2^2$$

$$\tilde{N}_3^0 \quad \tilde{N}_3^1 \quad \tilde{N}_3^2 \quad \tilde{N}_3^3$$

………………..

Определение: Биномом Ньютона называют разложение вида:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n =$$

$$= a^n + na^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \ldots + \frac{n!}{(n-m)!\, m!} a^{n-m} b^m + \ldots + b^n, \text{ где } m < n$$

Но, строго говоря, всю формулу нельзя назвать биномом, так как «бином» переводится как «двучлен». Кроме того, формула разложения была известна еще до Ньютона, Исаак Ньютон распространил это разложение на случай n<0 и n – дробного.

Цель изучения бинома Ньютона – упрощение вычислительных действий. *Компоненты* формулы «бином Ньютона»:

- ✓ правая часть формулы – разложение бинома;
- ✓ $C_n^0; C_n^1; \ldots C_n^n$ – биномиальные коэффициенты, их можно получить с помощью ***треугольника Паскаля***

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

и так далее

- ✓ общий член разложения бинома n-й степени:

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m, \; m = 0,1,2,..n,$$

где T – член разложения; $(m+1)$ – порядковый номер члена разложения.

Практическая значимость треугольника Паскаля заключается в том, что с его помощью можно запросто восстанавливать по памяти не только известные формулы квадратов суммы и разности, но и формулы куба суммы (разности), четвертой степени и выше.

Например, четвертая строчка треугольника как раз наглядно демонстрирует биномиальные коэффициенты для бинома четвертой степени:

$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b + 6\cdot a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4$$

Альтернатива треугольнику Паскаля:

1) перемножить почленно четыре скобки:

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = a^4 + \ldots;$$

2) вспомнить разложение бинома Ньютона четвертой степени:

$$(a+b)^4 = C_4^0a^4b^0 + C_4^1a^3b^1 + C_4^2a^2b^2 + C_4^3a^1b^3 + C_4^4a^0b^4 =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1$$

Историческая справка. В 13 в.н.э. начался расцвет арабской науки. Решая вопрос об извлечении корней любой степени, арабские алгебраисты пришли к формуле для степени суммы двух чисел, известной под исторически неверным названием «бином Ньютона». По видимому эту формулу знал, живший в 11-12 вв. н.э. поэт и математик Омар Хайям. Судя по некоторым источникам, восходящим к арабским оригиналам, для отыскания коэффициентов этой формулы брали число 10001 и возводили его во 2-ю, 3-ю,…, 9-ю степени. Получалась таблица

1**000**9**00**36**00**84**0**126**0**126**00**84**00**36**000**9**00**1
1000**8**00**28**00**56**00**70**00**56**00**28**000**8**000**1**
1000**7**00**21**00**35**00**35**00**21**000**7**000**1**
1000**6**00**15**00**20**00**15**000**6**000**1**
1000**5**00**10**0**10**000**5**000**1**
1000**4**000**6**000**4**000**1**
1000**3**000**3**000**1**
1000**2**000**1**
1000**1**

В которой жирным шрифтом выделены коэффициенты бинома Ньютона. Если опустить в этой таблице излишние нули, то получится треугольная таблица, состоящая из биномиальных коэффициентов.

$(a+b)^0$	$=$	1	0	1
$(a+b)^1$	$=$	$a+b$	1	1 1
$(a+b)^2$	$=$	$a^2+2ab+b^2$	2	1 2 1
$(a+b)^3$	$=$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	3	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$=$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	4	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	$=$	$\dots$	5	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	$=$	$\dots$	6	1 6 15 20 15 6 1

Арабские ученые знали и основное свойство этой таблицы, которое выражалось формулами $\tilde{N}_n^{\hat{e}} = \tilde{N}_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Интересовались сочетаниями и в Индии. Еще во 2 в.до н.э. индийцы знали числа C_n^k и такой факт , что $\sum_{k=0}^{n} \tilde{N}_n^k = 2^n$. А в 12 в. Индийский математик Бхаскара написал книгу «Лилавати», в которой среди других вопросов математики изучает и проблемы комбинаторики. Он пишет о применениях перестановок к подсчету вариаций в стихосложении, различных расположений в архитектуре и т.д. Он дает также правила для отыскания числа перестановок и сочетаний нескольких предметов, причем рассматривает также случай, когда в этих перестановках есть повторяющиеся элементы.

Типовые задачи по теме «Бином Ньютона».

1.В биномиальном разложении $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{12}$ найти член разложения, не содержащий x.

Решение: $T_{m+1} = C_{12}^m \left(x^2\right)^{12-m} \left(\frac{1}{x^2}\right)^m = C_{12}^m\, x^{24-2m-2m} = C_{18}^m\, x^{24-4m}$

Так как в разложении мы ищем член не содержащий x, то $24 - 4m = 0 \Rightarrow m = 6$

Тогда $T_{6+1} = C_{12}^6 = \frac{12!}{(12-6)!\,6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 924.$

2. Доказать, что при любом натуральном n число $\left(4^n + 15n - 1\right)$ делится на 9

Доказательство:

$$4^n = (3+1)^n = 3^n + C_n^{n-1}\cdot 3^{n-1} + C_n^{n-2}\cdot 3^{n-2} + \ldots + C_n^2\cdot 3^2 + C_n^1\cdot 3^1 + 1$$

$$4^n + 15n - 1 = \left(3^n + C_n^{n-1}\cdot 3^{n-1} + C_n^{n-2}\cdot 3^{n-2} + \ldots + C_n^2\cdot 3^2 + C_n^1\cdot 3^1 + 1\right) + 15n - 1 =$$

$$= 3\cdot\left(3^{n-1} + n\cdot 3^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^{n-3} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^1 + 6n\right) =$$

$$= 3\cdot 3\cdot\left(3^{n-2} + n\cdot 3^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^{n-4} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^0 + 2n\right) \vdots\ 9$$

Что и требовалось доказать.

3. Решить уравнения а) $\grave{A}_n^3 - 5C_{15}^3 = 455$; б) $\tilde{N}_n^{n-2} + C_n^{n-1} = 55$.

Решение:а) $\grave{A}_n^3 - 5C_{15}^3 = 455$; $\dfrac{n!}{(n-3)!} - 5\cdot\dfrac{15!}{3!\cdot 12!} = 455$; $\dfrac{n!}{(n-3)!} = 2730$; $n! = 2730(n-3)!$;

$(n-3)!\left[(n-2)\cdot(n-1)\cdot n - 2730\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}(n-3)! = 0\\(n-2)\cdot(n-1)\cdot n = 2730\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}n \in \otimes, \text{ò.ê.äàæå } 0! = 1\\ n = 15\end{array}\right. \Leftrightarrow n = 15.$

б) $\tilde{N}_n^{n-2} + C_n^{n-1} = 55$; $\dfrac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} + \dfrac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = 55$; $\dfrac{(n-1)\cdot n}{2} + \dfrac{n}{1} = 55$; $n^2 + n - 110 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}n = -11 \notin N\\ n = 10\end{array}\right. \Leftrightarrow n = 10.$